ЛЕКЦИЯ-15

§7.3. Меллин түрлендіруі және оны қолдану

Қолданбалы есептерде жоғарыдағы Лаплас түрлендіруімен бірге екіжақты Лаплас түрлендіруі

$$F(p)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{129}$$

қолданады, мұндағы, $f(t)$ функциясы теңдіктің оң жағындағы интеграл анықталатындай болып таңдап алынады.

Мысалы, егер

$$|f(t)|\le\begin{cases} e^{\alpha t}, & t>0, \\ e^{-\alpha t}, & t<0 \end{cases}$$

болса, бұл функциядан алынған $F(p)$ функциясы $|\operatorname{Re} p|>\alpha$ облысында аналитикалық функция болады. (129) формуласы мен анықталған Лапластың екіжақты түрлендіруі де жоғарыдағы Лапластың біржақты түрлендіруіндегідей Меллиннің кері түрлендіру формуласымен

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp \tag{130}$$

тікелей байланысты.

Егер (129) бен (130) формулаларында p-ны $-p$-ға t-ны $\tau=e^{t}$ функциясына ауыстырсақ, онда ол түрлендірулер

$$F(-p)=\int_{0}^{\infty} f(\ln\tau)e^{p\ln\tau}\frac{d\tau}{\tau}, \quad f(\ln\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(-p)e^{-p\ln\tau}dp$$

түрінде жазылады. Бұлардан $f(\ln\tau)=g(\tau)$ және $F(-p)=G(p)$ деп белгілесек,

$$G(p)=\int_{0}^{\infty} g(t)t^{p-1}dt,\ (\sigma+i\eta=p), \quad g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}G(p)t^{-p}dp, t>0 \tag{131}$$

Меллин түрлендіруін аламыз.

1. Бұл түрлендіруді де Лаплас түрлендіруіндей төмендегі қасиеттерге ие болады:

$1^0.\ f(\alpha t) \div \dfrac{G(p)}{\alpha^p};$

$$2^0.\ t^{\alpha} g(t) \div G(p+\alpha); \quad 3^0.\ f(t)g(t) \div \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq. \tag{132}$$

Мына төмендегі туындыны түрлендіру туралы теоремаға арнайы тоқталайық.

4^0. Егер $\lim\limits_{t\to 0} t^{p-1}g(t) = \lim\limits_{t\to\infty} t^{p-1}g(t) = 0$ болса, онда

$$g'(t) \div -(p-1)G(p-1). \tag{133}$$

Дәлелдеуі. Меллин түрлендіруін $g(t)$ функциясының туындысына қолданып,

$$g'(t) \div \int_0^\infty g'(t)t^{p-1}dt = g(t)t^{p-1}\Big|_0^\infty - (p-1)\int_0^\infty g(t)t^{p-2}dt = -(p-1)G(p-1).$$

(133) формуласын қайталап (131) түрлендіруін кез келген жоғарғы ретті туынды үшін анықтауға болады. (132) және (133) өрнектерінен:

егер $t^p g(t)|_0^\infty = 0$ болса,

$$tg'(t) \div -pG(p),$$

егер $t^{p+1}g'(t)|_0^\infty = t^p g(t)|_0^\infty = 0$ болса,

$$t^2 g''(t) \div p(p+1)G(p).$$

5^0. Егер $f(t)$ мен $g(t)$ функцияларының Меллин түрлендірулері сәйкес түрде $F(p)$ мен $G(p)$ болса, онда:

$$\int_0^\infty f(\tau) g\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} \div F(p)G(p). \tag{134}$$

Дәлелдеуі. Меллин түрлендіруін қолданып,

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\tau)g\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}\right)t^{p-1}dt = \left|\frac{t}{\tau} = t_1\right| = \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau\left(\int_0^\infty g(t_1)t_1^{\,p-1}dt_1\right)\tau^{p-1}\tau = F(p)G(p).$$

2. Меллин түрлендіруінің қолданылулары. (134) формуласын

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^{\infty}\varphi(\tau)K\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{dt}{\tau}+f(t) \qquad (135)$$

интегралдық теңдеуді шешуге қолданады. $\varphi(t), f(t), K(t)$ функциялары үшін Меллин түрлендіруі орынды болсын, яғни $\varphi(t)\div\Phi(p), f(t)\div F(p), K(t)\div K(p)$ анықталған болсын, мұндағы, $F(p)$ мен $K(p)$ ортақ $\sigma_1<\operatorname{Re}p=\sigma<\sigma_2$ облысында аналитикалық функциялар болсын. (135) теңдеуінің екі жағына Меллин түрлендіруін қолдансақ, $\Phi(p)=F(p)+\lambda K(p)\Phi(p)$, бұдан

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-\lambda K(p)},$$

демек,

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(p)}{1-\lambda K(p)}t^{-p}dp$$

жоғарыдағы (135) теңдеуінің шешімі.

Мысал ретінде Фокстың интегралдық теңдеуін қарастырайық:

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^{\infty}K(x,t)\varphi(t)dt. \qquad (136)$$

Бұл теңдеудің екі жағында x^{p-1} функциясына көбейтіп, одан кейін x бойынша 0-ден ∞-ке дейін интегралдап,

$$\int_0^{\infty}x^{p-1}\varphi(x)dx=\int_0^{\infty}x^{p-1}f(x)dx+\int_0^{\infty}\varphi(t)dt\int_0^{\infty}x^{p-1}K(x,t)dx$$

теңдігін аламыз. Бұған Меллин түрлендіруін қолдансақ,

$$\Phi(p)=F(p)+K(p)\int_0^{\infty}\varphi(t)t^{-p}dt.$$

Мұндағы, $\int_0^{\infty}t^{-p}\varphi(t)dt=\Phi(1-p)$ болғандықтан, алдыңғы өрнекті

$\Phi(p)=F(p)+\Phi(1-p)K(p)$ түрінде аламыз. Бұл теңдік p-ны $1-p$-ға ауыстырсақ, $\Phi(1-p)=F(1-p)+\Phi(p)K(1-p)$. Соңғы өрнектерден

$$\Phi(p) = \frac{F(p) + F(1-p)K(p)}{1 - K(p)K(1-p)}. \qquad (137)$$

Енді (137) теңдігіне Меллиннің кері түрлендіру формуласын қолданып, (136) теңдеуінің шешімін анықтаймыз:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p) + F(1-p)K(p)}{1 - K(p)K(1-p)} x^{-p} dp.$$

Мысал. $\varphi(x) = f(x) + \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty \varphi(t)\cos xt dt$ интегралдық теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $\cos x$ функциясының кескінін анықтайық.

$$K(p) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^{p-1}\cos x dx,$$

ол үшін

$$\int_0^\infty e^{-ix}x^{p-1}dx = e^{-\frac{i\pi}{2}p}\Gamma(p)$$

формуласын қолданып, мұндағы нақты және жорамал бөліктерді өзара теңестіріп:

$$\int_0^\infty x^{p-1}\cos x dx = \Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}, \quad \int_0^\infty x^{p-1}\sin x dx = \Gamma(p)\cdot\sin\frac{\pi p}{2}$$

екенін анықтаймыз. Сондықтан

$$K(p) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty x^{p-1}\cos x dx = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}.$$

Бұдан кейін $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ екенін пайдалансақ,

$$\mathrm{K}(p)\mathrm{K}(1-p) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2} \cdot \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(1-p)\sin\frac{\pi p}{2} =$$

$$= \frac{2\lambda^2}{\pi}\Gamma(p)\Gamma(1-p)\cos\frac{\pi p}{2}\sin\frac{\pi p}{2} = \lambda^2.$$

Демек, (137) теңдігінен

$$\Phi(p)=\frac{1}{1-\lambda^{2}}\left[F(p)+F(1-p)\mathrm{K}(p)\right],\quad |\lambda|\neq 1$$

екенін анықтаймыз. Бұдан

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i(1-\lambda^{2})}\cdot\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+l\infty}\left[F(p)+F(1-p)\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}\right]x^{-p}dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi i(1-\lambda^{2})}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}x^{-p}F(p)dp+\frac{\lambda}{1-\lambda^{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}x^{-p}\Gamma(p)\Gamma(1-p)\cos\frac{\pi p}{2}dp.$$

Ал $\frac{1}{2\pi i(1-\lambda^{2})}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}x^{-p}F(p)dp=f(x),\quad \int_{0}^{\infty}t^{-s}f(t)dt=F(1-s)$ болғандықтан

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{1-\lambda^{2}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\lambda}{2\pi i(1-\lambda^{2})}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(xt)^{-p}F(p)\cos\frac{\pi p}{2}\left(\int_{0}^{\infty}f(t)dt\right)dp.$$

Бұл жерде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(xt)^{-p}\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}dp=\cos xt$$

екенін пайдалансақ, берілген теңдеудің шешімін

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{1-\lambda^{2}}+\frac{\lambda}{1-\lambda^{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot f(t)\cos xt$$

түрде анықтаймыз.